pàgina al dia i de catalogar les successions. La base de dades conté ara mateix més de 80.000 successions, 5.487 de les quals van ésser compilades en el llibre *The Encyclopedia of Integer Sequences*, de N. J. A. Sloane i S. Plouffe, San Diego, Academic Press, 1995. Les successions en el llibre estan ordenades lexicogràficament. Segons confessa ell mateix, la seva intenció és emmagatzemar *totes* les successions interessants. Encara que, com es pot veure pels exemples anteriors, el concepte de quines successions són interessants és més que discutible!

No cal dir que la pàgina és d'extrema utilitat per a investigadors en qualsevol branca de les matemàtiques, però especialment per a aquells especialitzats en combinatòria o en teoria de nombres, per citar alguna branca que es pot beneficiar directament de la pàgina. I ja ho sabeu, la propera vegada que algú us proposi una successió de la qual heu de trobar el terme general o els següents termes, aneu a l'*Enciclopèdia* i la busqueu. Gairebé segur que la trobareu!

Josep Burillo
UPC

Problemes

Nou número de la *SCM/Notícies* i nova tongada de problemes! Aquesta secció no seria res sense el treball dels lectors que ens envieu solucions i enunciats: el nostre agraïment a tothom!

Comencem amb un bonic problema de geometria mètrica que va ser proposat a l'Olimpíada Matemàtica Internacional d'Atenes. A continuació, l'inesgotable pou de desigualtats que és en José Luis Díaz-Barrero (gràcies novament!) ens obsequia amb un nou repte. Les propostes es tanquen amb dos problemes més, d'aparença geomètrica.

Publiquem, també, solucions a quatre problemes. Fem notar que una d'aquestes és la de l'enunciat **A62**, protagonista d'un desgraciat incident ja comentat (i esmenat) en el número anterior de la *SCM/Notícies*. Una altra, la del problema **A63**, és una solució diferent de la que ja havia sortit i hem cregut d'interès publicar-la.

En canvi, no hi ha encara cap resposta als enunciats **A64**, **A65** i **A67**, cosa que és una pena, perquè tots tres es veuen ben bonics.

Us recordem que el correu electrònic per als enviaments és cromero@xtec.net i que, si escriviu en els formats TEX o LaTEX, ens feu la feina més agradable i senzilla.

Problemes proposats

A69. (Proposat a l'Olimpíada Matemàtica Internacional, Atenes, 12 de juliol de 2004.) El triangle $\triangle ABC$ és un triangle acutangle amb $AB \neq AC$. El cercle de diàmetre BC talla els costats AB i AC respectivament en els punts M i N. El punt O és el punt mitjà del costat BC. Les bisectrius dels angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{MON}$ es tallen en el punt R. Cal demostrar que les circumferències circumscrites als triangles $\triangle BMR$ i $\triangle CNR$ tenen un punt comú al segment BC.

A70. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ els vèrtexs d'un polígon convex i sigui M qualsevol punt interior al polígon. Si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ són les projeccions respectives del punt M sobre els costats $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, proveu que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_kA_{k+1}^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} A_kM_k^2\right) \geq \frac{n^2}{4}$$

amb el benentès que $A_{n+1} = A_1$.

A71. (Proposat per la redacció.) Demostreu que els nombres reals i positius a, b i c són els costats d'un triangle no degenerat si, i només

si, qualsevol parella de nombres reals (p, q), amb $p + q = 1$, fa

$$a^2p + b^2q > c^2pq\,.$$

A72. (Proposat per la redacció.) Quantes parelles de nombres reals (p, q) hi ha de manera que els punts de $\mathbb{R}^2$ (p, q), (p^2, q^2) i (p^3, q^3) siguin els vèrtexs d'un triangle equilàter?

Solucions

A62. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Siguin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nombres positius. Proveu que

$$\frac{a_1}{a_2 + \sqrt[3]{a_1a_2^2}} + \frac{a_2}{a_3 + \sqrt[3]{a_2a_3^2}} + \cdots + \\ + \frac{a_n}{a_1 + \sqrt[3]{a_na_1^2}} \geq \frac{n}{2}\,.$$

Solució: (Solució del proponent.) Considerem la funció $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(t) = \frac{t^3}{1+t}\,.$$

Com que

$$f'(t) = \frac{t^2(3+2t)}{(1+t)^2} > 0$$

i

$$f''(t) = \frac{2t(3+3t+t^2)}{(1+t)^3} > 0\,,$$

la funció f és creixent i convexa.

En aplicar la *desigualtat de Jensen*, si tenim en compte que la mitjana geomètrica de n nombres positius és més petita o igual que la seva mitjana aritmètica i fem

$$t_k = \sqrt[3]{\frac{a_k}{a_{k+1}}}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

i

$$t_n = \sqrt[3]{\frac{a_n}{a_1}}$$

resulta

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right) \geq \\ \geq f\left(\left[\prod_{k=1}^{n} t_k\right]^{1/n}\right) = f(1) = \frac{1}{2}\,.$$

Observeu que la igualtat es verifica quan $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Això completa la prova.

A63. (Proposat per Pelegrí Viader, UPF.) Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua i $f(0) = f(1)$, demostreu que:

a) Per cada enter positiu n existeix una *corda horitzontal* del graf de f (una *corda horitzontal* és el segment que uneix dos punts del graf amb la mateixa ordenada) de longitud $1/n$.

b) Demostreu que f no té per què tenir necessàriament cordes horitzontals amb longitud que no sigui el recíproc d'un nombre enter.

(*Teorema de la corda universal*)

Solució: (Solució d'Albert Ferreiro Castilla, estudiant.) En el cas en què $n = 1$ la solució és clara perquè, per la hipòtesi del problema, els punts $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ tenen la mateixa ordenada i disten una unitat.

Suposem ara que $n > 1$. El nostre problema consisteix a trobar un *parell* de punts, $0 \leq x_1 \leq 1$ i $0 \leq x_2 \leq 1$, de manera que $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n}$ i $f(x_1) = f(x_2)$. Amb aquesta finalitat, considerem el conjunt següent de punts del pla:

$$\mathcal{C}_n = \left\{\left(x, x + \frac{1}{n}\right) \mid 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\right\} \subset \mathbb{R}^2\,,$$

el qual no és altre que el conjunt de totes les parelles de nombres reals que estan entre 0 i 1, que disten exactament $1/n$, però ordenades de manera que el primer dels elements és el petit. Observem que aquest conjunt $\mathcal{C}_n \subset \mathbb{R}^2$ és convex i connex, ja que és un segment d'una recta del pla. Considerem ara aquesta aplicació, que és una funció contínua:

$$F\colon \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$$

$$F(x, y) = f(x) - f(y)\,.$$

Si demostrem que, sobre el conjunt $\mathcal{C}_n$, la funció F pren valors positius i negatius, el *teorema de Bolzano* ens assegurarà l'existència d'un zero, que és justament el que estem buscant. Per fer-ho, suposarem això fals i arribarem a una contradicció.

Del conjunt $\mathcal{C}_n$ escollim la parella $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ i vegem quant hi val F. Si $F\left(0, \frac{1}{n}\right) = 0$ s'ha acabat el problema, perquè ja tenim la parella de punts que generen la corda de longitud $\frac{1}{n}$. Però, si no és així, podem suposar, sense perdre generalitat, que $F\left(0, \frac{1}{n}\right) > 0$.

Considerem ara la parella $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$: una altra vegada, si $F\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = 0$, ja tindrem la parella buscada o, si $F\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) < 0$, el *teorema de Bolzano* aplicat a la parella $\left(0, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \in \mathcal{C}_n$ ens assegura l'existència d'un punt de $\mathcal{C}_n$ amb imatge zero per F i també ja haurem acabat. Aleshores, per tal de mantenir la suposició, ha de ser

$$F\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) > 0$$

i, amb el mateix raonament, podem concloure que mantenir la suposició obliga que

$$F\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) > 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Transcrivim això:

$$F\left(0, \frac{1}{n}\right) > 0 \Rightarrow f(0) > f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$F\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\ldots$$

$$F\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right) > 0 \Rightarrow$$

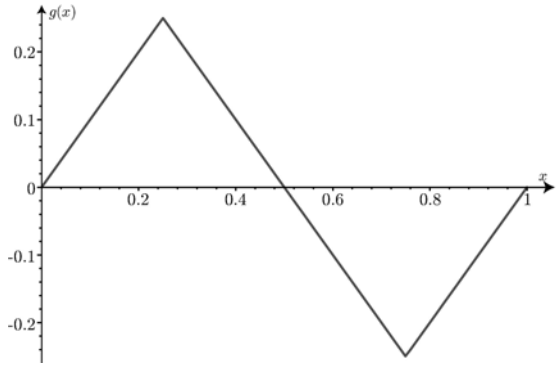
$$\Rightarrow f\left(\frac{n-1}{n}\right) > f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1)\,.$$

Però, aleshores, $f(0) > f(1)$, que contradiu la hipòtesi de l'enunciat del problema quant a la igualtat de les ordenades en els extrems del segment $[0, 1]$. En conseqüència, la funció F és negativa o zero en alguna de les parelles de $\mathcal{C}_n$ i, en qualsevol cas, obtenim el resultat demanat. Remarquem que el fet que busquem punts que disten entre ells el recíproc d'un enter és essencial, ja que, sino, la successió de punts que hem fet servir no hauria acabat en 1, que és el que necessitàvem per a contrastar la hipòtesi del problema.

Vegem ara la segona part del problema. L'afirmació és evident per a qualsevol recíproc d'un nombre entre 0 i 1: és clar que no pot haver-hi cap corda de longitud $\frac{1}{0{,}5} = 2$ i aquest no és el cas interessant. Construirem un exemple per al recíproc d'un nombre més gran que 1.

Considerem la funció següent sobre l'interval $[0, 1]$:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{4} \\ -x + \dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{3}{4} \\ x - 1 & \text{si } \dfrac{3}{4} \le x \le 1\,. \end{cases}$$



Aquesta és una funció contínua de l'interval unitat als nombres reals i compleix $g(0) = g(1) = 0$. Aleshores estem sota les hipòtesis de l'enunciat del problema, però veurem que no hi ha cap corda de longitud $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Observem la gràfica de la funció i veiem que podem separar els punts que tenen la mateixa ordenada en tres conjunts: els que tenen ordenada més gran que 0, els que tenen ordenada exactament igual a 0 i els que la tenen més petita que 0. El primer conjunt de punts només pot viure a l'interval $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, que, en qualsevol cas, té cordes horitzontals de longitud màxima $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. El segon conjunt de punts només pot viure al conjunt $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ amb cordes horitzontals de longituds 0, $\frac{1}{2}$ i 1 i el tercer conjunt és simètric del primer, que tampoc conté cap corda de longitud $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A66. (Proposat per Enric Ventura, UPC.) Demostreu que, donat un conjunt $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ de r matrius de nombres enters $n \times n$, invertibles o no, sempre n'hi ha una altra, B, que no es pot expressar com a producte de matrius del conjunt M (en qualsevol ordre, de qualsevol longitud, i acceptant repeticions).

Solució: (Solució de Jordi-Lluís Figueras Romero, UB.) Sabem que el determinant del producte de matrius és el producte dels determinants d'aquestes matrius. Si tota matriu amb coeficients enters fos producte de matrius de

M, aleshores tota matriu amb determinant p, primer, seria producte de matrius de M. Ara, però, en haver-hi infinits nombres primers, el conjunt M hauria de contenir infinites matrius, una per a cada p.

A68. (D'una olimpíada brasilera.) Trobeu totes les solucions enteres i positives de l'equació

$$(m+1)^n - 1 = m!$$

Solució: (Solució de Jordi-Lluís Figueras Romero, UB.) Es comprova amb pocs càlculs que, si $m < 10$, aleshores les úniques solucions són $m = n = 1$, $m = 2$ i $n = 1$, i $m = 4$ i $n = 2$. Vegem ara que no n'hi ha més.

Clarament, $n < m$. Aleshores, segons el *postulat de Bertrand*, hi ha p_1, primer, amb $\frac{m}{2} < p_1 < m$, que divideix $m!$ i no divideix m. Per tant, $(m+1)^n \equiv 1(\mathrm{mod} p_1)$ equival que $p_1 - 1 | n$ i, com que $n < m$, resulta $p_1 - 1 = n$.

Una nova aplicació del *postulat de Bertrand* mostra l'existència de p_2, també primer, amb $\frac{m!}{2} < p_2 < m!$, que divideix $m!$ i no divideix m. Ara, $(m+1)^n \equiv 1(\mathrm{mod}\ p_2)$ equival que $p_2 - 1 | n$, és a dir, $p_2 - 1 < p_1 - 1$, cosa que no pot ser, perquè $p_2 > \frac{m!}{2} > m > p_1$.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Juan A. Mantecón Baena va llegir la seva tesi, dirigida per José Rodellar Benedé i Manuel Gómez Valentín, titulada *Sistemas de control predictivo en canales de riego: Formulación y simulación numérica* , el dia 5 d'abril de 2004. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.

L'objectiu d'aquesta tesi és l'aplicació de mètodes de control predictiu al problema de la gestió automàtica de canals de reg.

En els últims anys s'ha despertat un notable interès pels sistemes de control automàtic per a la gestió de canals de reg. Aquest interès té la seva base en la motivació per a l'estalvi dels recursos hídrics mitjançant la modernització de les xarxes de distribució utilitzant noves tecnologies i nous mètodes d'optimització i control. Aquesta tesi pretén contribuir en aquest context amb el desenvolupament de sistemes de control per a canals de reg utilitzant conceptes de control predictiu, de modelització hidràulica i de simulació numèrica.

Es considera un canal com una conducció dividida en N trams separats per comportes amb un embassament de nivell constant en l'extrem aigua amunt, i un abocador en l'extrem aigua avall. En cada tram es considera una petita zona d'emmagatzematge, just abans de la comporta aigua avall, on es consideren situades les sortides laterals així com els sensors de nivell, cabal lateral i cabal sota comporta de cada tram.

El problema de control que es planteja és el de mantenir els nivells d'aigua en cada tram del canal a un cert valor de consigna, independentment que es produeixin pertorbacions en el sistema en forma de variació dels cabals laterals (demandes dels suposats regants). L'acció de control en cada tram està constituïda pel moviment de la comporta situada aigua amunt.

El model utilitzat per al control predictiu resulta de la combinació de dos conceptes clàssics: el model de Muskingum del flux en un tram i l'equació de continuïtat en la zona d'emmagatzematge.

Des del punt de vista del disseny i implementació dels algorismes de control, el problema s'aborda sota dues estratègies diferents: considerant cada tram com un sistema de control individual amb un controlador accionant cada comporta (estratègia descentralitzada) o